Compétences	😞	😐	🙂	😃
Définir et manipuler les suites numériques				
Étudier la monotonie d'une suite				
Démontrer par récurrence				

1 Introduction aux suites numériques

Définition 1.1 (Suite numérique)

Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre réel noté u_n. On note la suite (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1 Voici quelques exemples de suites numériques :

- Suite arithmétique : $u_n = 3n + 1$
- Suite géométrique : $v_n = 2^n$
- Suite définie par récurrence : $w_n = w_{n-1} + 2$ avec $w_0 = 0$

Important

Il existe deux façons principales de définir une suite :

- par son terme général (forme explicite) ;
- par récurrence (forme récurrente).

2 Modes de génération

Propriété 2.1 (Suite arithmétique)

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r.$$

Dans ce cas, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Exercice 2.1 [★★] *Suite arithmétique* (4 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 5n - 2$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Montrer que cette suite est arithmétique.
3. En déduire sa raison.

Corrigé de l'exercice 2.1

1. Pour $n = 0$: $u_0 = -2$.
   Pour $n = 1$: $u_1 = 3$.
   Pour $n = 2$: $u_2 = 8$.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = (5(n+1) - 2) - (5n - 2) = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5.$

3. La raison est donc $r = 5$.

PROPRIÉTÉ 2.2 (SUITE GÉOMÉTRIQUE)

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \text{ (si } u_n \neq 0).$$

Dans ce cas, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

MÉTHODE 2.1 (DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE)

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on procède en trois étapes.

INITIALISATION On vérifie que $P(0)$ est vraie.

HÉRÉDITÉ On montre que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

CONCLUSION Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 ÉTUDE DE LA MONOTONIE

THÉORÈME 3.1 (MONOTONIE D'UNE SUITE)

Soit (u_n) une suite numérique.

- *(u_n) est croissante* $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$
- *(u_n) est décroissante* $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0.$

EXEMPLE 3.1 (ÉTUDE DE MONOTONIE) Étudions la monotonie de la suite (v_n) définie par $v_n = n^2 - 3n + 1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left[(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\right] - (n^2 - 3n + 1) && \text{\textit{développement}} \\ &= (n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1) - (n^2 - 3n + 1) && \text{\textit{réduction}} \\ &= n^2 + 2n - 1 - n^2 + 3n - 1 \\ &= 2n - 2 \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0 \iff n \geqslant 1$.
La suite est croissante à partir du rang 1.

EXERCICE 3.1 *APPLICATION* (3 POINTS)

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1. Calculer $w_{n+1} - w_n$.
2. En déduire la monotonie de la suite.

4 Applications et exercices

Activité 4.1 (Modélisation)

On considère une population de bactéries qui double toutes les heures. À l'instant initial, on compte 1 000 bactéries.

1. Quelle est la nature de la suite donnant le nombre de bactéries?
2. Exprimer le terme général de la suite.
3. Calculer le nombre de bactéries au bout de 5 heures.

```python
def calculer_termes_suite(n):
    """Calcule les n premiers termes d'une suite"""
    u = 1000
    termes = [u]

    for i in range(n):
        u = 2 * u
        termes.append(u)

    return termes

# Exemple d'utilisation
premiers_termes = calculer_termes_suite(5)
for i, terme in enumerate(premiers_termes):
    print(f"u_{i} = {terme}")
```

Exercice 4.1 [★★★] (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. On conjecture que la suite est croissante et majorée par 3. Démontrer ces propriétés par récurrence.
3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

À retenir

- Une suite peut être définie explicitement ou par récurrence.
- Les suites arithmétiques et géométriques ont des propriétés particulières.
- La monotonie s'étudie en analysant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- La démonstration par récurrence est un outil fondamental.